LEGGE INTERESSI SEMPLICI:

$$W(t) = W(0) \cdot (1 + t \cdot i)$$

LEGGE INTERESSI COMPOSTI:

$$W(t) = W(0)\,(1+i)^t$$

LEGGE ESPONENZIALE:

$$W(t) = W(0)\, e^{\delta t}$$

con $\delta = \lg(1+i)$

TASSI:

i = tasso interesse annuo

i_2 = tasso interesse semestrale

i_3 = tasso interesse quadrimestrale

i_4 = tasso interesse trimestrale

i_6 = tasso interesse bimestrale

i_{12} = tasso interesse mensile

In generale, vale la relazione:

$$i_n = (1+i)^{\frac{1}{n}} - 1$$

<u>Esempio:</u>

Sia $i = 8{,}3\%$. Calcolare i_2, i_6, i_{12}

<u>Sol</u>

$$i_2 = (1+0{,}083)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}0407$$

$$i_6 = (1+0{,}083)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}0134$$

$$i_{12} = (1+0{,}083)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0067$$

Analogamente, se si ha ad esempio i_{12} e si vuole trovare i_6, si procede nel seguente modo:

$$i_6 = (1+i_{12})^{2} - 1$$

Se si ha i_2, si ha:

$$i_6 = (1 + i_2)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Dunque se si ha i_6, e si vuole trovare i, i_2, i_{12}, ecc..., si ha che:

$$i = (1 + i_6)^{6} - 1$$

$$i_2 = (1 + i_6)^{3} - 1$$

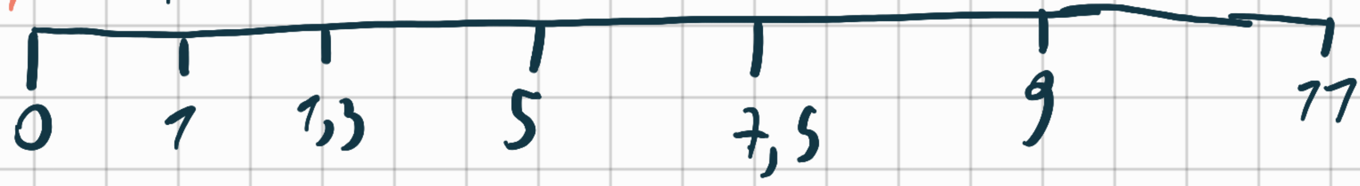
$$i_{12} = (1 + i_6)^{\frac{1}{2}} - 1$$

COME SI CAPITALIZZA?

COME SI SCONTA?

Consideriamo il seguente influsso di importi

X 10 15 27 50 24 Y



Dobbiamo trovare X e Y.

- L'operazione per trovare X è quella di sconto
- L'operazione per trovare Y è quella di capitalizzazione.

<u>Si procede così:</u>

<u>CASO SCONTO:</u>

Sappiamo che vale $W(t) = W(0)\,(1+i)^t$ nel caso degli interessi composti. Ma, allora

$$W(0) = W(t)\,(1+i)^{-t}$$

Però nel nostro caso si ha un flusso di più importi, non di uno solo.

Dobbiamo scontarli tutti e quindi sommarli:

Si ha:

$$X = 10(1+i)^{-1} + 15(1+i)^{-1,3} + 27(1+i)^{-5} +$$
$$+ 50(1+i)^{-7,5} + 24(1+i)^{-9}$$

CASO CAPITALIZZAZIONE:

Anche in questo caso sappiamo che vale $W(t) = W(0)(1+i)^t$, però siamo in presenza di un flusso di importi, dobbiamo capitalizzarli tutti e sommarli (escluso quello al tempo $t=0$), si ha:

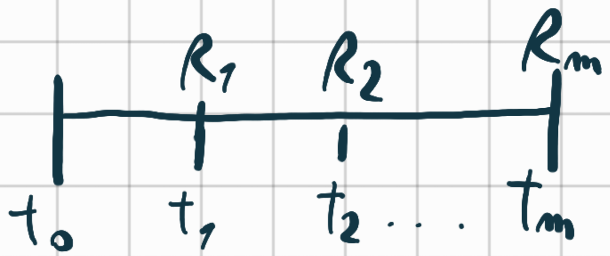
$$Y = 10(1+i)^{11-1} + 15(1+i)^{11-1,3} + 27(1+i)^{11-5}$$
$$+ 50(1+i)^{11-7,5} + 24(1+i)^{11-9}$$

Perché abbiamo escluso $t=0$? Perché

l'importo in $t=0$ è quello che dà il rio al tutto, quindi si hanno due possibili vie da seguire:

- Capitalizzare solamente $W(0)$
- Capitalizzare tutto il flusso (è il metodo che abbiamo usato nell'esempio sopra).

RENDITE



Rendita può essere:
- certa (tutto è noto)
- aleatoria (qualcosa è ignota)

- periodica (stesso arco di tempo)
- aperiodica (arco di tempo è variabile)

posticipata (se pagata a fine periodo)
antiticipata (se pagata a inizio periodo)

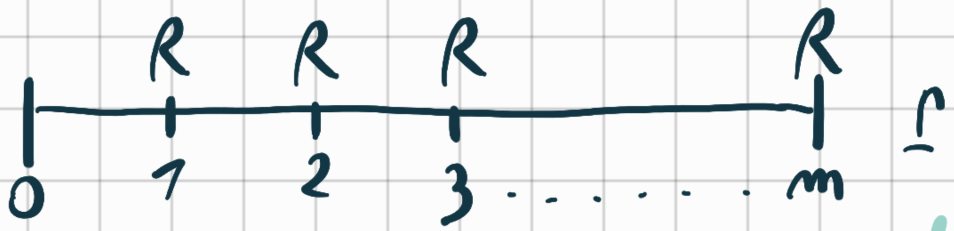
costante (cifra costante)
variabile (cifra variabile)

immediata (pagata subito)
differita (pagata dopo n anni)

temporanea (numero finito di rate)
perpetua (numero infinito di rate)

Consideriamo i diversi casi possibili:

1) Rendita immediata, posticipata, temporanea:

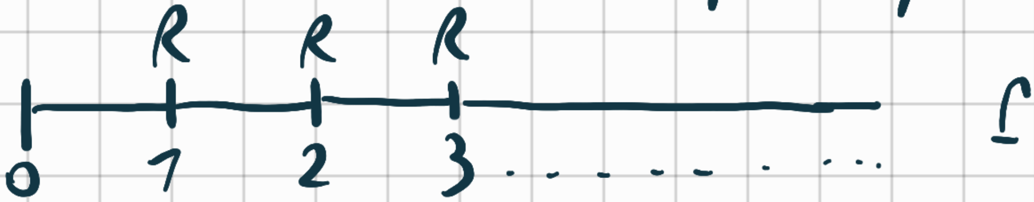


$$W(0,\underline{r}) = R\, v\, \frac{1-v^n}{1-v}$$

Analogamente

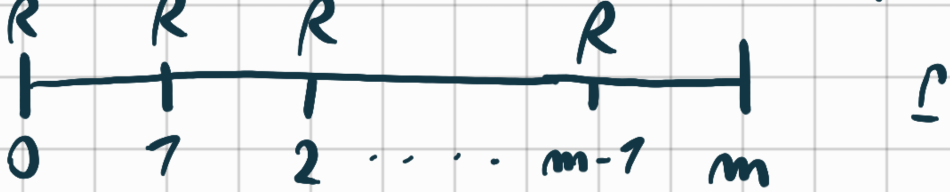
$$\left[\, W(0,\underline{r}) = R\, \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \,\right]$$

2) Rendita <u>immediata</u>, <u>posticipata</u>, <u>perpetua</u>:



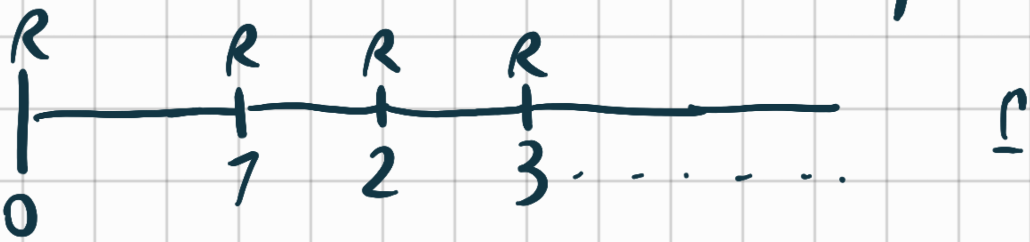
$$W(0,\underline{r}) = R\, v \frac{1}{1-v} \qquad \left[W(0,\underline{r}) = \frac{R}{i} \right]$$

3) Rendita <u>immediata</u>, <u>anticipata</u>, <u>temporanea</u>:



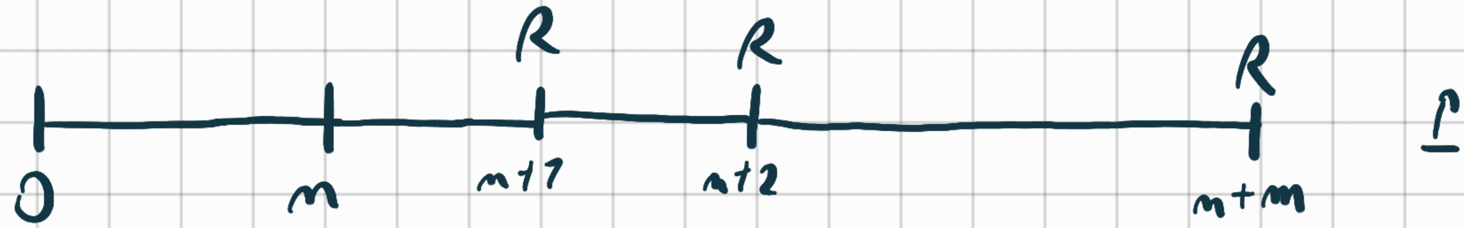
$$W(0,\underline{r}) = R \frac{1-v^m}{1-v} \qquad \left[W(0,\underline{r}) = R \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} (1+i) \right]$$

4) Rendita <u>immediata</u>, <u>anticipata</u>, <u>perpetua</u>:



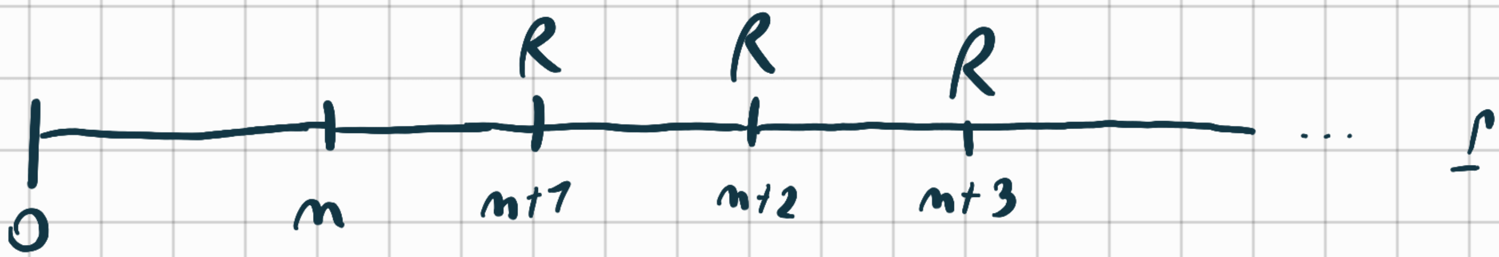
$$W(0,\underline{r}) = \frac{R}{i} \frac{1}{v} \qquad \left[W(0,\underline{r}) = \frac{R}{i} (1+i) \right]$$

5) Rendita differita, posticipata, temporanea:



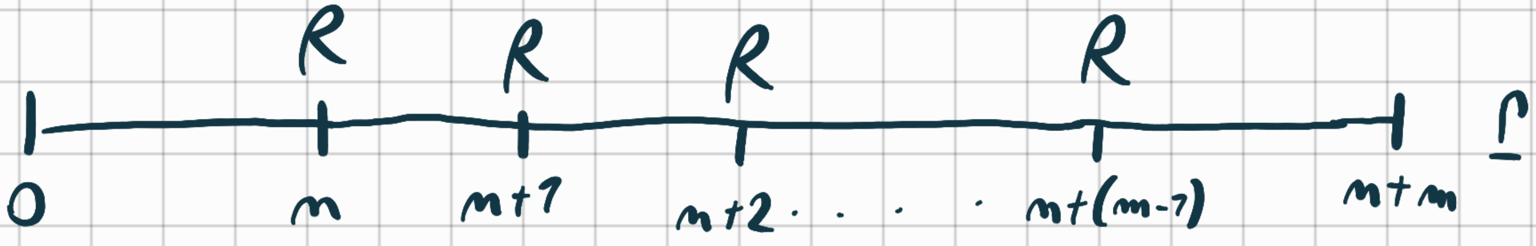
$$W(0,\underline{r}) = R\, v^{n+1} \frac{1-v^m}{1-v} \qquad \left[W(0,\underline{r}) = R(1+i)^{-n} \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \right]$$

6) Rendita differita, posticipata, perpetua:



$$W(0,\underline{r}) = R \frac{v^n}{i} \qquad \left[W(0,\underline{r}) = R \frac{(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

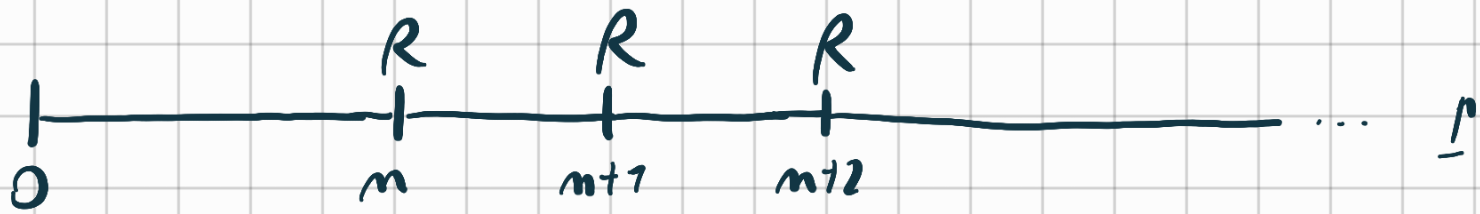
7) Rendita differita, anticipata, temporanea:



$$W(0,\underline{r}) = R\, v^n \, \frac{1-v^m}{1-v}$$

$$\left[W(0,\underline{r}) = R\,(1+i)^{-(n-1)} \cdot \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \right]$$

8) Rendita differita, anticipata, perpetua:



$$W(0,\underline{r}) = R\, \frac{v^n}{i} \cdot \frac{1}{v}$$

$$\left[W(0,\underline{r}) = R\, \frac{(1+i)^{-(n-1)}}{i} \right]$$

MONTANTI DELLE RENDITE:

1) Montante rendita immediata, posticipata, temporanea:

Si ha:

$$W(m,\underline{r}) = W(0,\underline{r}) \cdot (1+i)^m$$

$$\Rightarrow W(m, \underline{r}) = R \, \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \, (1+i)^m \Rightarrow$$

$$\boxed{W(m, \underline{r}) = R \, \frac{(1+i)^m - 1}{i}}$$

2) Montante rendita <u>immediata</u>, <u>anticipata</u>, <u>temporanea</u>:

Si ha:

$$W(m, \underline{r}) = W(0, \underline{r}) \, (1+i)^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(m, \underline{r}) = R \, \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \, (1+i) \, (1+i)^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W(m, \underline{r}) = R \, \frac{(1+i)^m - 1}{i} \, (1+i)}$$

3) Montante rendita differita, posticipata,

temporanea:

Si ha:

$$W(m, r) = W(0, r)\,(1+i)^{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(m, r) = R\,\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}(1+i)^{-n}\,(1+i)^{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W(m, r) = R\,\frac{(1+i)^{m}-1}{i}\,(1+i)^{-n}}$$

4) Montante rendita differita, anticipata, temporanea:

Si ha:

$$W(m, r) = W(0, r)\,(1+i)^{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(m, r) = R\,\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}(1+i)^{-(n-1)}\,(1+i)^{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(m,r) = R\,\frac{(1+i)^{m}-1}{i}\,(1+i)^{-(n-1)}}$$

$\blacksquare$

PIANI DI AMMORTAMENTO:

1) Piano d'ammortamento francese: RATE COSTANTI

Un piano d'ammortamento dispone di diversi dati:

non per forza devono essere anni

- Il numero di anni: $K = 1, \dots, m$
- La Rata da pagare: R (che è costante)
- Quota Capitale: C_K
- Quota Interessi: I_K
- Debito residuo: M_K

Come si calcolano C_K, I_K, M_K ?

In generale si ha:

C_K	I_K	M_K
$C_0 = 0$	$I_0 = 0$	$M_0 = S$
$C_1 = R(1+i)^{-n}$	$I_1 = i \cdot M_0 = R - C_1$	$M_1 = M_0 - C_1$
$C_2 = C_1(1+i)$	$I_2 = i \cdot M_1 = R - C_2$	$M_2 = M_1 - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_K = C_{K-1}(1+i)$	$I_K = i \cdot M_{K-1} = R - C_K$	$M_K = M_{K-1} - C_K$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_n = C_{n-1}(1+i)$	$I_n = i \cdot M_{n-1} = R - C_n$	0

2) Piano d'ammortamento italiano: QUOTE CAPITALI COSTANTI

In generale si ha:

K	R_K	C_K	I_K	M_K
0	0	0	0	S
1	$R_1 = C_1 + I_1$	S/m	$I_1 = i\,M_0$	$S - C_1$
2	$R_2 = C_2 + I_2$	S/m	$I_2 = i\,M_1$	$S - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$R_m = C_m + I_m$	S/m	$I_m = i\,M_{m-1}$	$S - C_m$

3) Piano d'ammortamento tedesco : RATE COSTANTI ANTICIPATE

In generale si ha:

K	R_K	C_K	I_K	M_K
0	0	0	$I_0 = R - R(1+i)^{-m}$	$M_0 = S$
1	R	$C_1 = R(1+i)^{-(m-1)}$	$I_1 = R - C_1$	$M_1 = M_0 - C_1$
2	R	$C_2 = C_1(1+i)$	$I_2 = R - C_2$	$M_2 = M_1 - C_2$
3	R	$C_3 = C_2(1+i)$	$I_3 = R - C_3$	$M_3 = M_2 - C_3$

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	R	$C_m = C_{m-1}(1+i)$	0	0

4) Piani con preammortamento:

CI SONO m ANNI DI DIFFERITA

In generale si ha:

K	R_K	C_K	I_K	M_K
0	0	0	0	$M_0 = S$
1		0	$I_1 = i \cdot S$	$M_1 = S$
2		0	$I_2 = i \cdot S$	$M_2 = S$
⋮		⋮	⋮	⋮
m		0	$I_m = i \cdot S$	$M_m = S$
$m+1$				
$m+2$				
$m+3$				

⋮				
m				

Dall'anno $n+1$, si procede come un normale piano d'ammortamento, che può essere <u>francese</u> (quindi sappiamo il valore della rata), oppure <u>italiano</u> (quindi sappiamo $C_k = \frac{S}{m}$, ed è costante sempre) oppure <u>tedesco</u> (quindi sappiamo il valore della rata). ∎

MERCATO OBBLIGAZIONARIO

Mercato obbligazionario è caratterizzato da tre fattori principali:

1. <u>Ipotesi di non frizionalità</u>:
   - non ci sono costi di transazione né gravami fiscali;

gli oneri fiscali

- I titoli sono infinitamente divisibili
- Sono consentite vendite allo scoperto

② Competitività:

- Ci sono agenti massimizzatori
- Questi agenti sono "price-taker"

③ Assenza di arbitraggi

Un arbitraggio è quando non sono presenti cambiamenti di segno in un influsso di importi:

Esempio: (0, 10, 10, 20, 0) è arbitraggio

(5, 10, 11, 22, 9) è arbitraggio

(5, -10, 6, -8, 2) non è arbitraggio

TEOREMA DI DECRESCENZA RISPETTO ALLA SCADENZA

Per evitare arbitraggi deve sussistere la seguente relazione:

$$v(t,s') > v(t,s'') \qquad t \le s' < s''$$

TEOREMA DI INDIPENDENZA DALL' IMPORTO

Per evitare arbitraggi deve sussistere la seguente relazione:

$$V(t, x_s) = x_s \cdot v(t,s)$$

TEOREMA DELLA LINEARITÀ DEL

TEOREMA DELLA LINEARITÀ DEL PREZZO

Per evitare arbitraggi deve sussistere la seguente relazione:

$$V(t,\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t,t_k)$$

dove $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ flusso di importi sullo scadenzario $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$

TEOREMA DEI PREZZI IMPLICITI

Per evitare arbitraggi deve sussistere la seguente relazione:

$$v(t,T)\, v(t,T,s) = v(t,s)$$

$\blacksquare$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$\cdot\, v(t,T,s') > v(t,T,s'')$ con $t \le T \le s' < s''$

$\cdot\, v(t,T',s) < v(t,T'',s)$ con $t \le T' < T'' \le s$

$\cdot\, V(t,T,x_s) = x_s \cdot v(t,T,s)$

$$\cdot\, V(t,T,\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,T,t_k)$$

$\blacksquare$

Sappiamo che vale la relazione:

$$V(t_0,x_k) = x_k\, v(t_0,t_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t_0,t_k) = \frac{V(t_0,x_k)}{x_k}$$

Allora

$\{v(t_0,t_k)\}_{k=1,\dots,m}$ è la struttura per scadenza dei prezzi a pronti vigenti nel mercato in t_0

TASSI D'INTERESSE A PRONTI

$$i(t_0, t_k) = \left[\frac{1}{v(t_0, t_k)}\right]^{\frac{1}{t_k - t_0}} - 1$$

$\{i(t_0, t_k)\}_{k=1,\dots,m}$ è la struttura per scadenza dei tassi d'interesse a pronti vigenti nel mercato in t_0

$$v(t_0, t_{k-1}, t_k) = \frac{v(t_0, t_k)}{v(t_0, t_{k-1})}$$

$\{v(t_0, t_{k-1}, t_k)\}_{k=1,\dots,m}$ è la struttura per scadenze dei prezzi a termine vigenti nel mercato in t_0

TASSI D'INTERESSE A TERMINE

TASSI D'INTERESSE A TERMINE

$$i(t_0, t_{k-1}, t_k) = \left[\frac{1}{v(t_0, t_{k-1}, t_k)}\right]^{\frac{1}{t_k - t_{k-1}}} - 1$$

$\left\{ i(t_0, t_{k-1}, t_k) \right\}_{k=1,\dots,m}$ è la struttura per scadenza dei tassi d'interesse a termine vigente nel mercato in t_0 $\blacksquare$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$i(t_0, t_{k-1}, t_k) = (1 + i(t_0, t_k)) \cdot \left[\frac{1 + i(t_0, t_k)}{1 + i(t_0, t_{k-1})}\right]^{\frac{t_{k-1} - t_0}{t_k - t_{k-1}}} - 1$$

produttoria

$$i(t_0, t_k) = \prod^{k} \left[1 + i(t_0, t_{j-1}, t_j)\right]^{\frac{t_j - t_{j-1}}{t_k - t_0}} - 1$$

Metodo BOOTSTAP

Si ha che:

$$i(t_0,t_K)=\left(\frac{1+C_K}{\bar{v}(t_0,t_K)-C_K\left(\sum_{j=1}^{K-1}(1+i(t_0,t_j))^{-(t_j-t_0)}\right.}\right)^{\frac{1}{t_K-t_0}}-1$$

$\boxed{}$

TEORIA DEL PREMIO DELLA LIQUIDITÀ

Dice che le operazioni finanziarie a più lunga scadenza sono più rischiose

TEORIA DEI MERCATI SEGMENTATI

Afferma che ci sono parti di mercato che si comportano in modo diverso.

$\boxed{}$

MEDIA ARITMETICA DELLA SCADENZA

Si ha:

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k$$

dove $p_k = \dfrac{x_k\, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k)}$

dunque $p_k \in [0, 1]$ e $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$

In conclusione:

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \cdot \frac{x_k\, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k)}$$

Duration:

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\; x_k\; v(t, t_k)$$

$$D(t,\underline{x}) = \frac{\quad}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t,t_k)}$$

Si ha dunque:

$$t_1 - t \le D(t,\underline{x}) \le t_m - t$$

Proprietà di internalità

DOLLAR DURATION

Si ha che:

$$d_{\overline{m}|i} = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^m}{1-v} - m v^m\right) = \sum_{k=1}^{m} k v^k$$

DURATION DI UNA RENDITA

$$D(0,\underline{r}) = \frac{d_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} = \frac{\frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^m}{1-v} - m v^m\right)}{\frac{v}{1-v}\left(1-v^m\right)} =$$

$$= \frac{1}{\quad} - \frac{m v^m}{\quad}$$

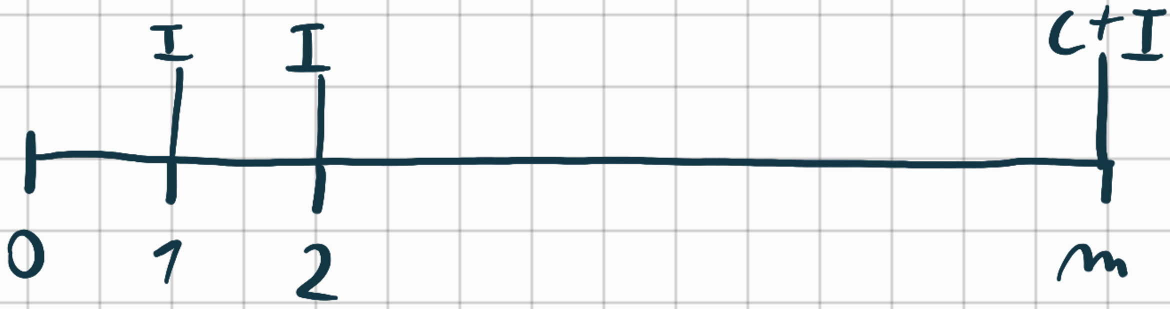
$$1-v \qquad 1-v^n$$

oppure analogamente si ha:

$$D(0,\underline{r}) = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}$$

$\blacksquare$

DURATION DI UN TCF



$$D(0,\underline{x}) = \frac{I \cdot d_{\overline{n}|i} + n\,C\,v^n}{I\,a_{\overline{n}|i} + C\,v^n}$$

$\blacksquare$

VARIAZIONE RELATIVA

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = - \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum^{n} \cdots} =$$

$$V(i) \qquad \sum_{k=1} x_k \, (1+i)^{-t_k}$$

$$= -\frac{1}{1+i} \; \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k}} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{1+i} \cdot D(0,\underline{x})}$$

è detta "Modified Duration"

$$\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, e^{-\delta t_k}} = -D(0,\underline{x})$$

$\blacksquare$

VARIAZIONE PERCENTUALE

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V(\delta+z)-V(\delta)}{V} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k \, e^{-(\delta+z)t_k} - \sum_{k=1}^{m} x_k \, e^{-\delta t_k}}{\sum^{m} x_k \, e^{-\delta t_k}}$$

$k=1$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -z \cdot D(0, \underline{x})$$ "z è lo shift (o incremento)"

Sia ora $V(i_0)$ e $V(i_0 + \Delta i)$, si ha:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V(i_0 + \Delta i) - V(i_0)}{V(i_0)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{\Delta i}{1+i_0} D(0, \underline{x})$$

IMMUNIZAZZIONE FINANZIARIA

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ attivi (guadagno)

$\underline{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ passivi (ciò che si paga)

$\underline{t} = (t_1, \ldots, t_m)$

Sia $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y} = (z_1, \ldots, z_m)$

$(x_1 - y_1, \ldots, x_m - y_m)$

Se $\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{z} = \underline{0}$ "Perfect matching"